

Uniwersytet Śląski
Instytut Matematyki

WSTĘP DO TEORII KATEGORII

Autor: MATEUSZ SZYMAŃSKI

Wstęp

Poniższy skrypt zawiera, a przynajmniej próbuje, podstawowe (i przy okazji elementarne) wprowadzenie do teorii kategorii jako języka opisującego struktury matematycznego oraz wzajemne relacje pomiędzy nimi. Celem tych notatek jest oswojenie Czytelnika z podstawowymi pojęciami oraz metodami (algebraicznymi) tej poddziedziny matematyki. O samych kategoriach możemy myśleć jako *strukturach*, które składają się z pewnych obiektów i przekształceń między nimi, które zachowują cechy rozważanych obiektów. Teorię tę można traktować z jednej strony jako pewien matematyczny *framework* (środowisko matematyczne) dla badanych struktur, z drugiej jednak – formę abstrakcji podstawowych, ogólnych własności pojęć, które współdzielone są, *mutatis mutandis*, z innymi, pozornie niezwiązanymi ze sobą, strukturami matematycznymi.

Zakładać będziemy, że Czytelnik zaznajomiony jest z podstawowymi strukturami matematycznymi: grupami, przestrzeniami liniowymi czy przestrzeniami topologicznymi – dowiemy się niebawem, że wraz ze swoimi homomorfizmami tworzą one kategorie.

Historycznie rzecz ujmując, za początek teorii kategorii uznaje się rok 1945 – datę opublikowania pracy Samuela Eilenberga oraz Saundersa MacLane’a *Natural isomorphisms in group theory*, a rozważania z tego zakresu wyrosły z topologii algebraicznej, która zajmuje się badaniem własności przestrzeni topologicznych przy użyciu metod algebraicznych. Należy mieć na uwadze, że od tego czasu pewne pojęcia z tego zakresu uległy przeobrażeniu – z dzisiejszego punktu widzenia nawet późniejsza praca *Categories for the Working Mathematician* (również autorstwa MacLane’a) przez niektórych może być uznawana za przestarzałą. Poniższy skrypt w głównej mierze bazuje na znacznie świeższej książce – *Abstract and Concrete Categories. The Joy of Cats* Adámka, Herrlicha i Streckera.

W tym skrypcie znajduje się wiele faktów do sprawdzenia jako ćwiczenie. Autor jest przekonany, że utrwalanie elementarnych definicji, własności i faktów teorii kategorii wymaga praktyki i samodzielnego wysiłku. Nie zmienia to faktu, iż szablonowe rozumowania, na których można się wzorować, są przedstawione w pełni bez niedomówień.

Kurs ten obejmuje (w zamierzeniu):

1. kategorie: podstawowe definicje i przykłady,
2. rodzaje morfizmów,
3. konstrukcje uniwersalne: produkty, sumy rozłączne,
4. kategorie i pojęcia dualne, zasadę dualności,
5. funktory,
6. diagramy, granice diagramów,
7. podkategorie, ich własności,
8. refleksje oraz korefleksje,
9. zastosowania teorii kategorii w ogólnych konstrukcjach.

Spis treści

Wstęp	1
1 Kategorie, morfizmy, produkty	3
1.1 Pojęcie kategorii	3
1.2 Morfizmy i ich rodzaje	6
1.3 Produkty, koprodukty	11
1.4 Obiekty początkowe i końcowe	16
2 Funktory, diagramy, granice	19
2.1 Kategorie dualne, zasada dualności	19
2.2 Funktory	21
2.3 Typy funktorów	24
2.4 Przekształcenia naturalne	28

Rozdział 1

Kategorie, morfizmy, produkty

1.1 Pojęcie kategorii

Nie tracąc czasu na zbędne spekulacje, możemy przejść do formalnej definicji kategorii, a brzmi ona następująco:

Definicja 1.1.1 (Kategoria). *Kategorią \mathbf{C} nazywamy strukturę złożoną z:*

1. klasy $\text{Ob}(\mathbf{C})$, której elementy nazywamy *obiektami*,
2. klasy $\text{Hom}(\mathbf{C})$, której elementami są *morfizmy* $f: A \rightarrow B$, gdzie A jest obiektem zwanym *dziędziną*, natomiast B – obiektem zwanym *przeciwdziędziną*,
3. operacji dwuargumentowej \circ zwanym *składaniem* $g \circ f$ morfizmów $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ spełniającym dwa warunki:
 - (a) jeżeli $f: A \rightarrow B$, $g: B \rightarrow C$ oraz $h: C \rightarrow D$, to $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ (*łączność*),
 - (b) dla każdego obiektu A istnieje morfizm id_A zwany *identycznością*, dla którego $f \circ \text{id}_A = f$ oraz $g \circ \text{id}_B = g$ dla każdego morfizmu $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow A$.

Innymi słowy kategoria składa się z pewnych obiektów oraz morfizmów między obiektami, dla których zachodzi łączne prawo składania morfizmów. Zauważmy, że ta dosyć abstrakcyjna definicja nie określa, czym powinny być obiekty! Co więcej, mimo nazewnictwa, morfizmy wcale nie muszą być funkcjami (choć, przynajmniej, na ogół będą).

Ćwiczenie 1.1.1. Sprawdź, że w dowolnej kategorii identyczność jest wyznaczona w sposób jednoznaczny.

Przekonamy się za moment, że bogactwo różnorodnych kategorii jest wprost niewyobrażalne. Przed tym jednak przekonamy się, że znane nam struktury matematyczne tworzą kategorie.

Przykład 1.1.1. Możemy wyróżnić podstawowe kategorie takie jak:

- **Set** – kategorię zbiorów wraz z funkcjami jako morfizmami,
- **Grp** – kategorię grup wraz z homomorfizmami grup,

- **Vec** – kategorię przestrzeni liniowych wraz z przekształceniami liniowymi,
- **Rng** – kategorię pierścieni (z jedynką) wraz z homomorfizmami pierścieni,
- **Top** – kategorię przestrzeni topologicznych wraz z funkcjami ciągłymi.

Oczywiście, powyższa lista nie jest kompletna. Czytelnik łatwo sprawdzi, że morfizmy każdej z wymienionych kategorii są domknięte na operację składania (np. złożenie funkcji ciągłych jest funkcją ciągłą). O morfizmach możemy w powyższych przypadkach myśleć jako przekształceniach zachowujących strukturę.

Na ogół przy zadeklarowanej klasie obiektów wybór morfizmów jest jasny. Zdarza się jednak, że dla tej samej klasy obiektów możemy wybrać inne morfizmy, tworząc tym samym inne kategorie: w klasie przestrzeni metrycznych za morfizmy możemy wybrać:

1. funkcje ciągłe,
2. funkcje jednostajnie ciągłe,
3. odwzorowania nierozszerzające: tj. funkcje $f: X \rightarrow Y$ między przestrzeniami metrycznymi (X, d_X) oraz (Y, d_Y) , dla których $d_Y(f(x), f(y)) \leq d_X(x, y)$.

Nie powinniśmy jednak myśleć o morfizmach jedynie jako funkcjach. Przytoczymy w tym momencie dwa pouczające przykłady.

Przykład 1.1.2. Rozważmy dowolny zbiór X . Utworzymy kategorię \mathbf{C} w następujący sposób: niech $\text{Ob}(\mathbf{C}) = X$ (a więc każdy punkt zbioru jest obiektem) oraz

$$\text{Hom}(\mathbf{C}) = \{\text{id}_x : x \in X\},$$

tj. jedynymi morfizmami są identyczności. Czytelnik może łatwo sprawdzić, że wszystkie warunki definicji kategorii są spełnione (w sposób trywialny). Kategorie, w których jedynymi morfizmami są identyczności, nazywamy *dyskretnymi*.

Przykład 1.1.3. Niech P będzie zbiorem częściowo uporządkowanym¹ relacją \leq . Podobnie jak poprzednio, niech klasą obiektów będzie zbiór P . Deklarujemy, że dla każdego dwóch elementów $x, y \in P$ istnieje dokładnie jeden morfizm $a \rightarrow b$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a \leq b$. Zwrotność relacji porządku gwarantuje istnienie identyczności, przechodniość natomiast – prawo składania morfizmów. Jak widać w tym przypadku, morfizmy nie stanowią funkcji.

Wygodną formę przedstawiania morfizmów jest *diagram*, który pozwala zilustrować złożenia, dla przykładu:

¹Relacja \leq na zbiorze P jest *częściowym porządkiem*, jeżeli dla wszystkich $x, y, z \in P$ zachodzą następujące warunki:

1. $x \leq x$ (zwrotność),
2. $(x \leq y \wedge y \leq x) \Rightarrow x = y$ (słaba antysymetria),
3. $(x \leq y \wedge y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (przechodniość).

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow h & \downarrow g \\
 & & C
 \end{array}$$

Zauważmy, że możliwe złożenie $g \circ f$, gdzie $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow C$ na pierwszy rzut oka wydaje się „odwrócone”, tj. niezgodne z kierunkiem strzałek, natomiast jeżeli przyjrzymy się dziedzinom i przeciwdziedzinom, zauważymy, że złożenia należy istotnie czytać „od końca”. Czytelnik powinien się przyzwyczaić do tego stanu rzeczy.

Podstawową własnością diagramu jest jego *przemienność*:

Definicja 1.1.2 (Przemienność diagramu). Mówimy, że diagram

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 & \searrow h & \downarrow g \\
 & & C
 \end{array}$$

jest przemienny, jeżeli $h = g \circ f$.

Jeżeli diagram *nie jest* przemienny, może się zdarzyć, że $h \neq g \circ f$.

Powyższą definicję możemy oczywiście na większą liczbę przekształceń, w innych konfiguracjach. Dla przykładu przemienność diagramu:

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{f} & B \\
 h \downarrow & & \downarrow g \\
 C & \xrightarrow{k} & D
 \end{array}$$

oznacza równość $g \circ f = k \circ h$. Możemy dzięki temu dorysować kolejną strzałkę $p: A \rightarrow D$, która spełnia

$$g \circ f = p = k \circ h,$$

zachowując przemienność diagramu. Czytelnik być może rozpoznaje podstawowy fakt z algebry grup zwanym *pierwszym twierdzeniem o izomorfizmie grup*, skrótowo zawartym w *przemiennym diagramie*:

$$\begin{array}{ccc}
 G & \xrightarrow{\varphi} & H \\
 & \searrow \pi & \uparrow \psi \\
 & & G/\ker \varphi
 \end{array}$$

gdzie $\varphi: G \rightarrow H$ jest homomorfizmem grup „na”, $\pi: G \rightarrow G/\ker \varphi$ – przekształceniem ilorazowym, natomiast ψ – jedynym takim homomorfizmem, że $\psi \circ \pi = \varphi$.

1.2 Morfizmy i ich rodzaje

Tak ogólne pojęcie morfizmu nie pozwala na rozróżnianie ich cech jakościowych. Z doświadczenia wiemy, że niektóre morfizmy (np. homomorfizmy grup) różnią się od siebie – niektóre z nich są różnowartościowe, podczas gdy inne stanowią surjekcje. Teoria kategorii pozwala wyodrębnić niektóre typy morfizmów niezależnie od kategorii, w której się znajdują. W szczególności interesować nas będą morfizmy zachowujące w pełni strukturę obiektu – izomorfizmy.

Definicja 1.2.1 (Izomorfizm). Mówimy, że morfizm $f: A \rightarrow B$ jest *izomorfizmem*, jeżeli istnieje takie $g: B \rightarrow A$, że

$$g \circ f = \text{id}_A \quad \text{oraz} \quad f \circ g = \text{id}_B. \quad (1.1)$$

Ćwiczenie 1.2.1. Wykaż, że jeżeli $f: A \rightarrow B$ jest izomorfizmem oraz g_1, g_2 spełniają warunek (1.1), to $g_1 = g_2$.

Powyższa uwaga pozwala nam mówić o *odwrotności* f oraz przyjąć zapis $f^{-1} = g$. Jeżeli między obiektami A i B istnieje izomorfizm, mówimy, że A i B są *izomorficzne*, tzn. identyczne z punktu widzenia rozważanej struktury. W dalszej części będziemy pisać

$$A \cong B \Leftrightarrow \text{istnieje izomorfizm } f: A \rightarrow B.$$

Nietrudno sprawdzić, że:

- izomorfizmami kategorii **Set** są bijekcje,
- izomorfizmami **Top** to homeomorfizmy przestrzeni topologicznych.

W kategoriach algebraicznych (tj. **Grp**, **Vec**, **Rng**) pojęcie izomorfizmu pokrywa się z pojęciem teoriokategoryjnym. We wszystkich podanych kategoriach, w których morfizmy były funkcjami, izomorfizmy z konieczności były bijekcjami. Nie jest jednak prawdą, że każdy bijektywny morfizm jest izomorfizmem:

Przykład 1.2.1. Rozważmy przestrzeń topologiczną $I = [0, 1]$ z topologią naturalną. Istnieje wzajemnie jednoznaczne odwzorowanie ciągłe $f: I \rightarrow S$ na okrąg

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 = 1\}$$

(z topologią dziedziczną z \mathbb{R}^2) niebędące homeomorfizmem.

Ćwiczenie 1.2.2. Uzasadnij powyższe stwierdzenie.

Przy okazji można zauważyć, że powyższe odwzorowanie traktowane jako „goła” funkcja jest izomorfizmem w kategorii **Set**, zapominając o topologii i wymaganii ciągłości morfizmów.

Jak wiemy chociażby z algebry, możemy mówić o monomorfizmach oraz epimorfizmach. To pojęcie przenosi się na grunt teorii kategorii:

Definicja 1.2.2 (Monomorfizm). Mówimy, że $f: A \rightarrow B$ jest *monomorfizmem* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary $h, k: C \rightarrow A$ spełniającej $f \circ h = f \circ k$ zachodzi $h = k$.

Innymi słowy możemy lewostronnie „skracać” monomorfizmy – możemy myśleć zatem algebraicznie o tej własności. Czasami, skrótowo, będziemy mówić „ f jest mono” zamiast „ f jest monomorfizmem”.

Zobaczmy, jak wyglądają monomorfizmy w kategorii **Set**.

Stwierdzenie 1.2.1. W kategorii **Set** funkcja $f: A \rightarrow B$ jest monomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy jest różnowartościowa.

DOWÓD. Załóżmy, że funkcja $f: A \rightarrow B$ jest monomorfizmem, pokażemy, że f musi być różnowartościowa, tj. $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$ dla wszelkich $x, y \in A$. Rozważmy singleton $\{p\}$ oraz określmy $a: \{p\} \rightarrow A$ jako $a(p) = x$ oraz $b: \{p\} \rightarrow A$, $b(p) = y$, gdzie $x \neq y$ są elementami A . Ponieważ $a \neq b$, z kontrapozycji definicji monomorfizmu otrzymujemy

$$f \circ a \neq f \circ b,$$

a więc

$$f(x) = f(a(p)) \neq f(b(p)) = f(y),$$

co dowodzi różnowartościowości f .

Przeciwną, łatwiejszą, implikację pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie. ■

Podobnie sytuacja ma się w kategoriach **Grp**, **Vec**, **Rng** oraz **Top**, gdzie monomorfizmy to dokładnie różnowartościowe homomorfizmy (bądź funkcje ciągłe w przypadku **Top**).

Wyróżnijmy dwie podstawowe własności monomorfizmu:

Stwierdzenie 1.2.2. Niech $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow C$ będą monomorfizmami. Wówczas złożenie $g \circ f$ również jest monomorfizmem.

DOWÓD. Wystarczy sprawdzić, że dla $g \circ f$ zachodzi prawo lewostronnego skracania. Ustalmy zatem taką parę $h, k: D \rightarrow A$, że $(g \circ f) \circ h = (g \circ f) \circ k$. Wówczas zachodzi równość

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k),$$

co pociąga

$$f \circ h = f \circ k,$$

ponieważ g jest monomorfizmem. Ponownie skracając z lewej strony mamy $h = k$, co dowodzi tezy. ■

Stwierdzenie 1.2.3. Załóżmy, że dla $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow C$ złożenie $g \circ f$ jest monomorfizmem. Wówczas f jest monomorfizmem.

DOWÓD. Ustalmy dowolną taką parę $h, k: D \rightarrow A$, że $f \circ h = f \circ k$. Wtedy również

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h) = g \circ (f \circ k) = (g \circ f) \circ k,$$

a na mocy założenia $h = k$. Pokazaliśmy tym samym, że f jest mono. ■

Jak już ustaliliśmy, nie zawsze morfizmy są funkcjami, tym samym nie powinniśmy myśleć o monomorfizmach jak o injekcjach. Poniżej skonstruujemy przykład, który

pokazuje, że nawet wśród kategorii z funkcjami jako morfizmami nasze intuicje mogą być zawodne:

Przykład 1.2.2. Niech A oraz B będą dowolnymi zbiorami oraz niech $f: A \rightarrow B$ będzie funkcją, która *nie jest* różnowartościowa. Konstruujemy kategorię \mathbf{C} w następujący sposób: $\text{Ob}(\mathbf{C}) = \{A, B\}$, natomiast

$$\text{Hom}(\mathbf{C}) = \{\text{id}_A, \text{id}_B, f\}.$$

Zwróćmy uwagę, że nie istnieje żaden morfizm $g: B \rightarrow A$. Z konieczności zatem jeżeli $f \circ h = f \circ k$, to $h = k$: jeżeli dziedziną h jest A , to jako że dziedziną f również jest A , a przeciwdziedziną B , $h = \text{id}_A$ i wtedy równość spełniona jest trywialnie. Dziedziną h nie może być B , bo, jak zdążyliśmy zauważyć, nie istnieje żaden morfizm odsyłający B w A . Tym samym f jest monomorfizmem nieróżnowartościowym.

Zauważmy, że w podanym przykładzie nie było istotne, jak dokładnie zachowuje się funkcja f . Mówiąc nieformalnie, kategoria \mathbf{C} nie „zagląda” do środka obiektów i morfizmów.

Dualnym pojęciem do monomorfizmu jest pojęcie epimorfizmu:

Definicja 1.2.3 (Epimorfizm). Mówimy, że $f: A \rightarrow B$ jest *epimorfizmem* wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdej pary $h, k: B \rightarrow C$ spełniającej $h \circ f = k \circ f$ zachodzi $h = k$.

Dla wygody zamiast pisać „ f jest epimorfizmem”, będziemy posługiwać się krótszym wyrażeniem „ f jest epi”. Czytelnik, wzorując się na poprzednich dowodach, łatwo może wykazać, że:

Stwierdzenie 1.2.4. Niech $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow C$ będą morfizmami. Jeżeli f oraz g są epi, to i złożenie $g \circ f$ jest epi. Ponadto, jeżeli wiadomo, że $g \circ f$ jest epimorfizmem, to g jest epi.

Nie będzie dla nas zdziwieniem, że w kategorii **Set** epimorfizmami są dokładnie funkcje „na”: jeżeli funkcja $f: A \rightarrow B$ jest surjekcją, a $h, k: B \rightarrow C$ takimi funkcjami, że $h \circ f = k \circ f$, to dla każdego $y \in B$ istnieje taki $x \in A$, że $f(x) = y$. Tym samym

$$h(y) = h(f(x)) = k(f(x)) = k(y),$$

co dowodzi równości $h = k$.

Sprawdzenie przeciwnej implikacji pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie². Nie należy jednak utożsamiać pojęcia epimorfizmu z surjekcjami! Nie sięgając daleko, możemy w kategorii **Rng** znaleźć różnowartościowy (!) epimorfizm niebędący surjekcją:

Przykład 1.2.3. Rozważmy homomorfizm pierścieni $i: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ zanurzający pierścień liczb całkowitych w ciało liczb wymiernych. Pokażemy, że i jest epimorfizmem. Rozważmy homomorfizmy pierścieni $h, k: \mathbb{Q} \rightarrow R$, dla których $h \circ i = k \circ i$. Ponieważ $i(n) = n \in \mathbb{Q}$, mamy

$$h(i(n)) = h(n) = k(n) = k(i(n))$$

²Wystarczy wnikliwie przetłumaczyć podany dowód dla monomorfizmów, „odwracając” strzałki, tj. kierunek morfizmów.

dla wszystkich $n \in \mathbb{Z}$. Niech $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$. Wówczas

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(a \cdot \frac{1}{b}\right) = h(a)h\left(\frac{1}{b}\right)$$

jako że h jest homomorfizmem pierścieni. Na podstawie poprzedniej równości wiemy, że $h(a) = k(a)$, zatem

$$h(a)h\left(\frac{1}{b}\right) = k(a)h\left(\frac{1}{b}\right) = k\left(b \cdot \frac{a}{b}\right)h\left(\frac{1}{b}\right) = k(b)k\left(\frac{a}{b}\right)h\left(\frac{1}{b}\right).$$

Skoro $k(b) = h(b)$, to

$$k(b)k\left(\frac{a}{b}\right)h\left(\frac{1}{b}\right) = h(b)k\left(\frac{a}{b}\right)h\left(\frac{1}{b}\right) = h(b)h\left(\frac{1}{b}\right)k\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(b \cdot \frac{1}{b}\right)k\left(\frac{a}{b}\right).$$

Ostatecznie

$$h\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(b \cdot \frac{1}{b}\right)k\left(\frac{a}{b}\right) = h(1)k\left(\frac{a}{b}\right) = k(1)k\left(\frac{a}{b}\right) = k\left(1 \cdot \frac{a}{b}\right) = k\left(\frac{a}{b}\right).$$

Czyli $h = k$, co należało wykazać.

Natomiast prawdziwe pozostaje następujące stwierdzenie:

Stwierdzenie 1.2.5. Jeżeli $\varphi: R \rightarrow S$ jest surjektywnym homomorfizmem pierścieni, to jest epimorfizmem.

Ćwiczenie 1.2.3. Uzasadnij powyższy fakt.

Wskazówka: Wykorzystaj podany fakt, że funkcje „na” spełniają ogólną własność $h \circ f = k \circ f \Rightarrow h = k$.

Inny, równie istotny, przykład znaleźć możemy w kategorii **Haus** przestrzeni Hausdorffa³:

Stwierdzenie 1.2.6. Funkcja ciągła $f: X \rightarrow Y$ między przestrzeniami Hausdorffa jest epimorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy ma gęsty obraz.

Przed dowodem tego stwierdzenia, odnotujmy następujący fakt:

Fakt 1.2.1. Jeżeli funkcje ciągłe $f, g: X \rightarrow Y$, gdzie Y jest przestrzenią Hausdorffa, spełniają warunek

$$f(x) = g(x), \quad x \in D$$

dla pewnego zbioru gęstego $D \subseteq X$, to $f = g$.

By uzasadnić powyższy fakt, zauważmy, że gdyby $f(x) \neq g(x)$ dla pewnego $x \in X$, to istniałyby dwa rozłączne zbiory U oraz V , dla których $f(x) \in U$ oraz $g(x) \in V$. Zbiór $W = f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ jest niepusty, bo zawiera x , oraz jest otwarty jako przekrój dwóch zbiorów otwartych, ponieważ funkcje f i g były ciągłe. Z drugiej strony na zbiorze W funkcje f oraz g muszą się różnić, bo U oraz V są rozłączne. Jako że zbiór D jest

³Przypomnijmy, że przestrzeń topologiczna X jest *przestrzenią Hausdorffa* (lub: *spełnia aksjomat oddzielania T_2*), jeżeli dla każdego dwóch różnych punktów $x, y \in X$ istnieją takie zbiory rozłączne otwarte U, V , że $x \in U$ oraz $y \in V$.

gęsty, przecina zbiór W w pewnym punkcie y . Ale z założenia $f(y) = g(y)$, co przeczy poprzedniej uwadze. Zatem $f(x) = g(x)$ dla wszystkich $x \in X$.

W dowodzie wykorzystamy ogólną konstrukcję następującej postaci: niech Z będzie przestrzenią topologiczną oraz niech $F \subseteq Z$ będzie pewnym podzbiorem. Konstruujemy przestrzeń $Z' = Z_1 \sqcup Z_2$ będącą sumą rozłączną⁴ dwóch kopii Z (tj., Z_1, Z_2 są przestrzeniami homeomorficznymi z Z). Poprzez oznaczenie z_1 oraz z_2 będziemy rozumieć kopię tego samego punktu $z \in Z$ odpowiednio w Z_1 i Z_2 . W Z' określimy relację równoważności $z_1 = z_2$ dla każdego $z \in F$, tj. utożsamiamy punkty zbioru F obu kopii, a następnie tworzymy przestrzeń ilorazową⁵ Z_F względem tak wprowadzonej relacji równoważności. Czytelnik może sprawdzić, że jeżeli Z jest przestrzenią Hausdorffa, natomiast F jego podzbiorem domkniętym, tak uzyskana przestrzeń Z_F również jest przestrzenią Hausdorffa.

DOWÓD. Przypuśćmy, że $f: X \rightarrow Y$ ma gęsty obraz w Y . Niech $h, k: Y \rightarrow Z$ będą dwoma funkcjami ciągłymi takimi, że $h \circ f = k \circ f$. Wówczas, ponieważ $f(X)$ jest gęstym podzbiorem Y , funkcje h oraz k zgadzają się na pewnym podzbiore gęstym, a więc, na mocy poprzedzającej uwagi, $h = k$.

Dla dowodu przeciwnej implikacji przyjmijmy, że dla funkcji ciągłej $f: X \rightarrow Y$, $f(X)$ nie jest gęste. Określmy $Z = \overline{f(X)}$ jako domknięcie obrazu przestrzeni X poprzez f , wtedy $Z \neq Y$.

Niech Y_Z będzie przestrzenią skonstruowaną według poprzedniej uwagi, a $h, k: Y \rightarrow Y_Z$ funkcjami zadanymi jako

$$h(x) = [x_1], \quad k(x) = [x_2],$$

gdzie $[y_i]$ stanowi klasę równoważności w Y_Z o reprezentancie x_i . Funkcje te są różne, ponieważ $Z \subsetneq Y$, natomiast zgadzają się na zbiorze Z (wprost z definicji przestrzeni Y_Z). Stąd też $h \circ f = k \circ f$, ale $h \neq k$. ■

Przekonamy się w dalszej części, że wyróżnienie mono/epimorfizmów jest wciąż zbyt ogólne: dla przykładu topologiczne przekształcenie ilorazowe (zanurzenie kanoniczne $\pi: X \rightarrow X/\sim$) jest, jak zobaczymy, czymś silniejszym od pojęcia epimorfizmu. Zwróćmy także uwagę, że w ogólności nieprawdą jest stwierdzenie, że każdy monomorfizm, któ-

⁴Dla dowolnych zbiorów A oraz B możemy wprowadzić tzw. sumę rozłączną:

$$A \sqcup B = \{(a, 0) : a \in A\} \cup \{(b, 1) : b \in B\}.$$

Jeżeli A oraz B były przestrzeniami topologicznymi, można zadać topologię na $A \sqcup B$ jako najmniejszą topologię, przy której włożenia $\varphi_1: A \rightarrow A \sqcup B$, $\varphi_2: B \rightarrow A \sqcup B$ zadane jako

$$\varphi_1(a) = (a, 0), \quad \varphi_2(b) = (b, 1)$$

są ciągłe. Równoważnie: podzbiór $U \subseteq A \sqcup B$ jest otwarty wtedy i tylko wtedy, gdy przeciwobrazy $\varphi_1^{-1}(U)$, $\varphi_2^{-1}(U)$ są otwarte odpowiednio w A i B . Suma rozłączna stanowi formę *koproduktu*, o których powiemy więcej w dalszej części.

⁵Przypomnijmy, że jeżeli X jest przestrzenią topologiczną z topologią τ , a \sim relacją równoważności określoną na zbiorze X , możemy utworzyć przestrzeń ilorazową X/\sim , to jest przestrzeń wszystkich klas równoważności wyznaczonych przez relację \sim , z topologią

$$\tau/\sim = \{U \subseteq X/\sim : \pi^{-1}(U) \in \tau\},$$

gdzie $\pi: X \rightarrow X/\sim$ przyporządkowuje x jego klasę abstrakcji $[x]_{\sim}$.

ry jest epi, jest izomorfizmem: podany poprzednio przykład przekształcenia odcinka na okrąg w kategorii **Top** stanowi kontrprzykład i dla tego stwierdzenia (sprawdź!). Natomiast z całą pewnością możemy stwierdzić, że:

Ćwiczenie 1.2.4. Wykaż, że każdy izomorfizm $f: A \rightarrow B$ jest zarówno mono, jak i epi.

Z kolei w niektórych kategoriach (najczęściej algebraicznych) istotnie izomorfizmy to dokładnie *bimorfizmy* – morfizmy jednocześnie mono oraz epi. Takimi kategoriami są m.in. **Grp**, **Vec** czy **Rng**.

Ćwiczenie 1.2.5. Pokaż, że w kategorii ciał **Fld** każdy epimorfizm jest izomorfizmem.

Wskazówka: Czy istnieją nieróżnowartościowe homomorfizmy ciał?

Z powyższego faktu skorzystamy w następnej części.

1.3 Produkty, koprodukty

W różnych gałęziach matematyki możemy spotkać się z produktem – czy to iloczynem kartezyjańskim zbiorów, produktem Tichonowa przestrzeni topologicznych czy produkcie grup algebraicznych. Okazuje się, że operację tworzenia produktu daje się wyabstrahować na gruncie teorii kategorii, ujmując ją za pomocą charakteryzacji wyrażonej w języku morfizmów. Zdefiniujemy produkt obiektów poprzez tak zwaną *własność uniwersalną*:

Definicja 1.3.1 (Produkt). *Produktem* obiektów X_1, X_2 nazywamy obiekt X oznaczany jako $X_1 \times X_2$ wraz z parą morfizmów $\pi_1: X \rightarrow X_1, \pi_2: X \rightarrow X_2$, nazywanych *naturalnymi rzutowaniami*, spełniającą następującą własność uniwersalną: dla każdego obiektu Y oraz pary morfizmów $f_1: Y \rightarrow X_1, f_2: Y \rightarrow X_2$ istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f: Y \rightarrow X$, że poniższy diagram

$$\begin{array}{ccccc} & & Y & & \\ & f_1 \swarrow & \downarrow f & \searrow f_2 & \\ X_1 & \xleftarrow{\pi_1} & X & \xrightarrow{\pi_2} & X_2 \end{array}$$

jest przemienny.

Zauważmy, że sam obiekt $X_1 \times X_2$ nie stanowi produktu: definicja uwzględnia obiekt wraz z parą morfizmów. Definicję możemy rozszerzyć na dowolną niepustą⁶ rodzinę obiektów $(X_i)_{i \in I}$: produktem rodziny obiektów $(X_i)_{i \in I}$ (oznaczanym jako $\prod_{i \in I} X_i$) nazywamy taki obiekt X wraz z rodziną morfizmów $(\pi_i)_{i \in I}$, gdzie $\pi_i: X \rightarrow X_i$, że dla każdego obiektu Y oraz rodziny morfizmów $(f_i)_{i \in I}, f_i: Y \rightarrow X_i$, istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f: Y \rightarrow X$, dla którego poniższy diagram jest przemienny:

⁶Póki co, bez dodatkowego pojęcia *obektu końcowego*, nie jesteśmy w stanie określić, czym byłby pusty produkt w danej kategorii.

$$\begin{array}{ccc} Y & & \\ f \downarrow & \searrow f_i & \\ X & \xrightarrow{\pi_i} & X_i \end{array}$$

Innymi słowy, postulujemy istnienie dokładnie jednego morfizmu spełniającego $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Należałoby się upewnić, że tak postawiona definicja zgadza się z konkretnymi realizacjami produktu w odpowiednich kategoriach.

Przykład 1.3.1. W kategorii zbiorów **Set** produkt w powyższym sensie pokrywa się z produktem zbiorów: dla dowolnej rodziny $(X_i)_{i \in I}$ określamy

$$\prod_{i \in I} X_i = \left\{ (x_i)_{i \in I} : \forall_{i \in I} x_i \in X_i \right\}$$

wraz z projekcjami $(\pi_i)_{i \in I}$, $\pi_j: \prod_{i \in I} X_i \rightarrow X_j$ zadanymi jako

$$\pi_j((x_i)_{i \in I}) = x_j.$$

Dla każdego zbioru Y oraz rodziny funkcji $(f_i)_{i \in I}$, $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ przekształcenie $f: Y \rightarrow \prod_{i \in I} X_i$ postaci

$$f(y) = (f_i(y))_{i \in I}$$

jest jedynym odwzorowaniem spełniającym równość $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Przykład 1.3.2. Dla dowolnej rodziny przestrzeni topologicznych w kategorii **Top** można utworzyć produkt (jako zbiór), wyposażając go w najmniejszą topologię, przy której wszystkie rzutowania są ciągłe. Taka topologia nosi nazwę *topologii produktowej* i spełnia abstrakcyjną własność uniwersalną produktu.

W poprzedniej części skonstruowaliśmy małą kategorię na podstawie zbioru częściowo uporządkowanego. I dla takich kategorii pojęcie produktu ma (znany) sens:

Przykład 1.3.3. Niech (P, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, natomiast **C** – kategorią skonstruowaną tak jak w przykładzie 1.1.3. Niech $x, y \in P$ będą dwoma dowolnymi elementami. Załóżmy, że $z = x \times y$ jest produktem elementów $x, y \in P$ w sensie definicji 1.3.1. Wówczas istnieje para morfizmów $z \rightarrow x$ oraz $z \rightarrow y$, tj. $z \leq x$ oraz $z \leq y$. Ponadto dla każdej pary $w \rightarrow x$ oraz $w \rightarrow y$ (a więc $w \leq x, y$) istnieje dokładnie jeden⁷ morfizm $w \rightarrow z$, tj. $w \leq z$.

A zatem dla każdego elementu $w \in P$ mniejszych wspólnie od x, y , element w nie przekracza z . Jest to nic innego jak definicja *kresu dolnego* dwóch elementów zbioru częściowo uporządkowanego. Produkt w sensie teoriokategoryjnym pokrywa się więc z kresem dolnym, tj. $x \times y = \inf\{x, y\}$.

Łatwo sprawdzić, że, na tej samej zasadzie, dla podzbioru $A \subseteq P$ produkt $\prod_{a \in A} a$ równy jest $\inf A$.

⁷Zauważmy, że jedyność jest zagwarantowana z konstrukcji kategorii.

Z powyższego przykładu można odczytać m.in., że przekrój zbiorów $A \cap B \subseteq X$ jest produktem w zbiorze potęgowym $\mathcal{P}(X)$ zbioru X . Podobnie największy wspólny dzielnik $\text{NWD}(n_1, \dots, n_k)$ liczb naturalnych n_1, \dots, n_k jest produktem w zbiorze częściowo uporządkowanym $(\mathbb{N}, |)$, gdzie $|$ stanowi relację podzielności.

Nie zawsze kres dolny w zbiorze częściowo uporządkowanym istnieje. Tym samym nie w każdej kategorii dla wszystkich obiektów istnieje ich produkt.

Przykład 1.3.4. Rozważmy kategorię ciał **Fld**. Niech K będzie dowolnie ustalonym ciałem. Przypuśćmy, że istnieje produkt $K \times K$ wraz z parą naturalnych rzutowań $\pi_1, \pi_2: K \times K \rightarrow K$. Rozważmy parę morfizmów $(\text{id}_K, \text{id}_K)$; rozkłada się ona względem π_1, π_2 zgodnie z poniższym przemiennym diagramem:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & K & & \\
 & \swarrow \text{id}_K & \downarrow \psi & \searrow \text{id}_K & \\
 K & \xleftarrow{\pi_1} & K \times K & \xrightarrow{\pi_2} & K
 \end{array}$$

Ponieważ id_K jest epimorfizmem, na mocy 1.2.4 π_1, π_2 również są epi, a więc jako zanurzenia ciał (patrz: ćwiczenie 1.2.5) muszą być izomorfizmami. Zatem

$$\pi_1 = \text{id}_K = \pi_2 \quad \text{oraz} \quad K \times K \cong K.$$

Korzystając z własności uniwersalnej produktu, dla dowolnych zanurzeń ciał $\varphi_1, \varphi_2: L \rightarrow K$ istnieje jedyny taki homomorfizm ciał $\varphi: L \rightarrow K \times K$, że

$$\varphi_1 = \pi_1 \circ \varphi = \varphi = \pi_2 \circ \varphi = \varphi_2$$

jako że π_1, π_2 są w rzeczywistości identycznościami K . A zatem każde dwa homomorfizmy ciał $L \rightarrow K$ muszą się pokrywać.

W szczególności dla $L = K = \mathbb{C}$ z powyższego wynikałoby, że nie istnieje nietrywialny automorfizm ciała liczb zespolonych, co jest sprzeczne z istnieniem sprzężenia $z \mapsto \bar{z}$.

O kategoriach, w których dla dowolnej rodziny obiektów istnieje produkt, mówimy, że posiadają produkty. Zaznaczmy także, że produkt, o ile istnieje, jest zawsze jednoznacznie wyznaczony. Dokładniej rzecz ujmując:

Stwierdzenie 1.3.1. Załóżmy, że dla rodziny obiektów $(X_i)_{i \in I}$ istnieją dwa produkty X, X' spełniające własność uniwersalną produktu. Wówczas $X \cong X'$.

DOWÓD. Niech $(\pi_i)_{i \in I}$ oraz $(\pi'_i)_{i \in I}$ będą naturalnymi rzutowaniami odpowiednio dla X oraz X' . Rozważmy następujący diagram:

$$\begin{array}{ccccc}
 X_i & \xleftarrow{\pi'_i} & X' & & \\
 & \swarrow \pi_i & \updownarrow \begin{array}{c} g \\ f \end{array} & \searrow \pi'_i & \\
 & & X & \xrightarrow{\pi_i} & X_i
 \end{array}$$

Z określenia produktu powyższy diagram jest przemienny (dla doboru $Y = X'$ oraz $f_i = \pi'_i$ dla prawej strony z własności produktu X oraz $Y = X$, $f_i = \pi_i$ z własności produktu X' dla lewej strony), ponadto funkcja $f: X' \rightarrow X$ spełniająca $\pi'_i \circ f = \pi_i$ dla każdego $i \in I$ wyznaczona jest w sposób jednoznaczny. Na podobnej zasadzie istnieje jedyne $g: X \rightarrow X'$, dla którego zachodzi tożsamość $\pi_i \circ g = \pi'_i$, $i \in I$. Łącząc powyższe równości, uzyskujemy

$$\pi_i \circ \text{id}_X = \pi_i = \pi'_i \circ g = (\pi_i \circ f) \circ g = \pi_i \circ (f \circ g).$$

Zatem, ponieważ zarówno dla morfizmu $h = \text{id}_X$, jak i $h = f \circ g$, diagram

$$\begin{array}{ccc} X & & \\ h \downarrow & \searrow \pi_i & \\ X & \xrightarrow{\pi_i} & X_i \end{array}$$

jest przemienny dla każdego $i \in I$, to z jedyności h (dla doboru $f_i = \pi_i$ z własności uniwersalnej produktu) musi zachodzić $\text{id}_X = f \circ g$. Analogicznie zachodzi $\text{id}_{X'} = g \circ f$, a więc $X \cong X'$. ■

Powyższy fakt uzasadnia stosowanie jednego symbolu $\prod_{i \in I} X_i$ dla produktu rodziny obiektów, co zagwarantowane jest dzięki jedyności postulowanego morfizmu f o własności $f_i = \pi_i \circ f$ dla każdego $i \in I$.

Tak jak iloczyn kartezjański, produkt w sensie teorii kategorii jest łączny. Dokładniej:

Ćwiczenie 1.3.1. Dla dowolnych obiektów X, Y, Z zachodzi $(X \times Y) \times Z \cong X \times (Y \times Z)$, o ile produkty te istnieją.

Wskazówka: Rozważ następujący diagram:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & & (X \times Y) \times Z & & \\ & & & & \nearrow a_1 & & \searrow a_2 \\ X & \xleftarrow{p_1} & X \times Y & \xrightarrow{p_2} & Y & \xleftarrow{q_1} & Y \times Z \xrightarrow{q_2} Z \\ & \nwarrow b_1 & \uparrow i & \nearrow g & \nwarrow h & & \\ & & X \times (Y \times Z) & & & & \end{array}$$

gdzie morfizmy zaznaczone przerywaną strzałką są jedynymi morfizmami spełniającymi własność uniwersalną produktu (dla doboru odpowiednich obiektów i morfizmów). Wykaż następujące równości:

$$q_i \circ b_2 \circ (f \circ g) = g_i \circ b_2 \circ \text{id}_{X \times (Y \times Z)}, \quad i \in \{1, 2\}.$$

Ćwiczenie 1.3.2. Wykaż, że produkt jednoelementowej rodziny postaci $\prod\{X\}$ jest izomorficzny z X . Czy zachodzi równość $\prod\{X\} = X$?

Tak jak pojęcie epimorfizmu było, w pewnym sensie, pojęciem dualnym dla pojęcia monomorfizmu, tak i w przypadku pojęcia produktu możemy mówić o pojęciu dualnym, „odwracając” kierunki morfizmów. Tym pojęciem jest *koprodukt*.

Definicja 1.3.2 (Koprodukt). *Koproduktem* rodziny obiektów $(X_i)_{i \in I}$ (oznaczanym jako $\coprod_{i \in I} X_i$) nazywamy taki obiekt X wraz z rodziną morfizmów $(\iota_i)_{i \in I}$ zwanych *naturalnymi włożeniami*, gdzie $\iota_i: X_i \rightarrow X$, że dla każdego obiektu Y oraz rodziny morfizmów $(f_i)_{i \in I}$, $f_i: X_i \rightarrow Y$, istnieje dokładnie jeden taki morfizm $f: X \rightarrow Y$, dla którego poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} X_i & \xrightarrow{\iota_i} & X \\ & \searrow f_i & \downarrow f \\ & & Y \end{array}$$

jest przemienny, tj. $f_i = f \circ \iota_i$ dla każdego $i \in I$.

Dowody dotyczące produktów daje się „przetłumaczyć” na dowody dla obiektów dualnych, wykorzystując zasadę dualności, o której będzie mowa w dalszej części tego skryptu.

Ćwiczenie 1.3.3. Wykaż, że koprodukt w kategoriach **Set**, **Top** pokrywa się z sumą rozłączną zbiorów/przestrzeni.

Przypomnijmy, że sumę rozłączną rodziny zbiorów $(X_i)_{i \in I}$ określić możemy jako

$$\coprod_{i \in I} X_i = \bigcup_{i \in I} \{(x, i) : x \in X_i\},$$

gdzie dodatkowo zadać możemy rodzinę włożeń $(\iota_i)_{i \in I}$:

$$\iota_i: X_i \rightarrow \coprod_{i \in I} X_i, \quad \iota_i(x) = (x, i), \quad i \in I.$$

Dla rodziny przestrzeni topologicznych na powyższym zbiorze możemy wprowadzić topologię spełniającą dla każdego $i \in I$ następujący warunek: zbiór $\iota_i[X_i]$ jest otwarty w $\coprod_{j \in I} X_j$ oraz, traktowany jako podprzestrzeń sumy rozłącznej, jest homeomorficzny z X_i . Innymi słowy, możemy określić na $\coprod_{i \in I} X_i$ największą topologię, dla których włożenia ι_i są ciągłe dla każdego $i \in I$.

Ćwiczenie 1.3.4. Niech (P, \leq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym, niech ponadto kategoria **C** określona będzie jak w przykładzie 1.1.3. Wykaż, że dla $A \subseteq P$ zachodzi równość

$$\coprod_{a \in A} a = \sup A,$$

o ile kres górny A istnieje.

1.4 Obiekty początkowe i końcowe

W tej części poznamy specjalne obiekty kategorii oraz przyjrzymy się nieco bliżej strukturze $\text{Hom}(A, B)$ morfizmów między ustalonymi obiektami A oraz B .

Definicja 1.4.1 (Obiekt początkowy/końcowy). Obiekt I nazywamy *obiektem początkowym*, jeżeli dla każdego obiektu X istnieje dokładnie jeden morfizm $I \rightarrow X$. Obiekt T nazywamy *obiektem końcowym*, jeżeli dla każdego obiektu X istnieje dokładnie jeden morfizm $X \rightarrow T$. Obiekt O nazywamy *obiektem zerowym*, jeżeli jest zarówno początkowy, jak i końcowy.

Stwierdzenie 1.4.1. Jeżeli obiekt początkowy (bądź końcowy) w kategorii istnieje, to jest on jedyny z dokładnością do izomorfizmu.

Ćwiczenie 1.4.1. Uzasadnij powyższe stwierdzenie.

Przykład 1.4.1. W kategorii:

- **Set** obiektem początkowym jest zbiór pusty, natomiast końcowy – zbiór jednoelementowy,
- **Rel** zbiorów oraz relacji dwuargumentowych zbiorów pusty jest zarówno obiektem początkowym, jest i końcowym,
- **Grp**, **Vec_K** (przestrzeni liniowych nad ustalonym ciałem K) obiektem zerowym jest grupa/przestrzeń liniowa trywialna (jednoelementowa),
- **Rng** pierścieni (z jedyneką) obiektem początkowym jest pierścień liczb całkowitych.

Ćwiczenie 1.4.2. Dla każdego pierścienia R skonstruuj odwzorowanie $\mathbb{Z} \rightarrow R$ i wykaż jedność takiego odwzorowania.

Wskazówka: Porównaj przykład 1.2.3.

Z poprzedniego stwierdzenia jest jasne, że kategorie zbiorów czy przestrzeni topologicznych nie posiadają obiektu zerowego. Ogólniej, jeżeli $I \not\cong T$, to kategoria nie posiada obiektów zerowych. Obiekty zerowe często występują w kategoriach algebraicznych, szczególnie w tzw. *ciągach dokładnych*⁸.

Przykład 1.4.2. W kategorii ciał **Fld** nie istnieje obiekt początkowy/zerowy. W podkategorii ciał **Fld_p** charakterystyki p obiektem początkowym jest ciało skończone \mathbb{Z}_p .

By dowieść pierwszego stwierdzenia, wystarczy zauważyć, że nie istnieją homomorfizmy ciał dla ciał F oraz K o różnej charakterystyce. Istotnie, jeżeli $\varphi: F \rightarrow K$ jest morfizmem, gdzie $\text{char } F = p$ dla pewnej liczby pierwszej $p \in \mathbb{P}$, to skoro

$$\underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ razy}} = 0,$$

⁸Pojęcie to nie będzie w tym momencie określane.

to

$$0 = \varphi(0) = \varphi(p) = \varphi(p \cdot 1) = \underbrace{\varphi(1) + \dots + \varphi(1)}_{p \text{ razy}} = \underbrace{1 + \dots + 1}_{p \text{ razy}}.$$

Stąd $\text{char } K = p$. Jeżeli ciało F było charakterystyki 0, to, jako przekształcenie różnowartościowe, dla każdego $n \in \mathbb{N}$ nie może zachodzić $\varphi(n) = 0$, w przeciwnym razie $n = 0$. Zatem i w tym przypadku $\text{char } F = 0 = \text{char } K$.

Zatem gdyby I było obiektem początkowym charakterystyki p , nie istniałby morfizm $I \rightarrow F$ dla ciała F o innej charakterystyce wbrew definicji obiektu początkowego. Analogicznie możemy argumentować dla obiektu końcowego. Kategoria **Fld** nie posiada żadnego z obiektów tego rodzaju.

Jeżeli jednak zawężymy się do kategorii ciał o ustalonej charakterystyce p dla pewnej liczby pierwszej, możemy pokazać, że \mathbb{Z}_p jest obiektem zerowym. Ustalmy ciało F charakterystyki p . Wówczas jedynym homomorfizmem ciał jest zanurzenie $\varphi: \mathbb{Z}_p \rightarrow F$, które jednoznacznie określone jest warunkami

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(1) = 1.$$

Ćwiczenie 1.4.3. Scharakteryzuj obiekty początkowe/końcowe/zerowe (o ile istnieją) w kategorii utworzonej na zbiorze częściowo uporządkowanym w przykładzie 1.1.3.

Dla każdych dwóch obiektów A oraz B kategorii \mathbf{C} możemy wyróżnić podklasę $\text{Hom}(A, B) \subseteq \text{Hom}(\mathbf{C})$ morfizmów $A \rightarrow B$. W wielu przypadkach podklasa ta będzie tworzyć zbiór. W szczególnym przypadku, gdy $A = B$, możemy mówić o *endomorfizmach* obiektu:

$$\text{End}(A) = \text{Hom}(A, A).$$

Podklasą endomorfizmów są tzw. *automorfizmy* – izomorfizmy obiektu w siebie. W ogólnym przypadku badanie struktury endomorfizmów/automorfizmów jest trudne. Struktura ta bowiem zależy zarówno od całej kategorii, która „wymusza” pewne własności endomorfizmów, a także od specyfiki samego obiektu tej kategorii.

Przykład 1.4.3. Zbiór liczb rzeczywistych \mathbb{R} traktowany jako obiekt:

- kategorii **Set** posiada $2^{\mathfrak{c}}$ funkcji (endomorfizmów) $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ oraz tyle samo bijekcji permutacji (automorfizmów),
- kategorii **Fld** ma tylko jeden automorfizm – identyczność⁹.

Zdarza się, że struktura endomorfizmów/automorfizmów zależy od przyjętej aksjomatyki. Rozważmy „pośredni” przykład kategorii grup:

Przykład 1.4.4. Rozważmy grupę addytywną $(\mathbb{R}, +)$ w kategorii **Grp**. Jeżeli $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ jest izomorfizmem, można pokazać, że dla każdych $q \in \mathbb{Q}$ oraz $x \in \mathbb{R}$ zachodzi $\varphi(qx) = q\varphi(x)$. Tym samym każdy taki automorfizm jest jednocześnie automorfizmem przestrzeni \mathbb{R} nad ciałem \mathbb{Q} . Przy założeniu pewnika wyboru dla doboru dwóch różnych

⁹Z kolei dla ciała \mathbb{C} możemy na gruncie pewnika wyboru otrzymać $2^{\mathfrak{c}}$ różnych automorfizmów tego ciała, z czego tylko dwa – identyczność oraz sprzężenie – są ciągle.

(nieprzeliczalnych) baz Hamela $(e_i)_{i \in I}$, $(e'_i)_{i \in I}$ przekształcenie φ wyznaczone jednoznacznie warunkiem

$$f(e_i) = e'_i, \quad i \in I$$

jest automorfizmem $(\mathbb{R}, +)$. Zbiór wszystkich automorfizmów jest więc mocy $2^{\mathfrak{c}}$.

Sytuacja drastycznie zmienia charakter, jeżeli aksjomat wyboru nie zachodzi. Dla przykładu, przy założeniu aksjomatu determinacji¹⁰, każdy automorfizm \mathbb{R} jest z konieczności ciągły, a każdy taki automorfizm jest postaci $\varphi(x) = ax$ dla pewnego $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Tym samym grupa automorfizmów ciała \mathbb{R} jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$ mocy \mathfrak{c} .

Powróćmy w tym miejscu do obiektów końcowych. Dla każdego obiektu początkowego I zachodzi w trywialny sposób

$$\text{Aut}(I) = \text{End}(I) = \{\text{id}_I\}.$$

Zachodzi pewien związek między produktami a obiektami końcowymi kategorii:

Stwierdzenie 1.4.2. Jeżeli kategoria posiada obiekt końcowy T , to pusty produkt \prod_{\emptyset} jest izomorficzny z T .

By udowodnić to stwierdzenie, wprowadzimy pojęcia *diagramu* oraz *granicy diagramu*.

¹⁰Nie będziemy wchodzić w tym miejscu w detale.

Rozdział 2

Funktory, diagramy, granice

2.1 Kategorie dualne, zasada dualności

Do tej pory kategorie były rozważane w odizolowaniu od innych struktur. Przekształcenia obiektów (i morfizmów) jednej struktury w drugą nazywać będziemy *funktoremami* – dokładna definicja pojawi się w tej części skryptu. Zanim jednak przedstawimy to pojęcie, sformułujemy zapowiadaną wcześniej zasadę dualności.

Definicja 2.1.1 (Kategoria dualna). Niech \mathbf{C} będzie dowolną kategorią. Kategorię \mathbf{C}^{op} złożoną z obiektów kategorii \mathbf{C} , dla której dla każdego obiektów $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ zachodzi¹ $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(A, B) = \text{Hom}_{\mathbf{C}}(B, A)$, gdzie ponadto zachodzi

$$f \circ_{\mathbf{C}^{\text{op}}} g = g \circ_{\mathbf{C}} f$$

dla wszystkich morfizmów, nazywamy *kategorią dualną* bądź *przeciwną* do kategorii \mathbf{C} .

Innymi słowy kategoria dualna powstaje przez „odwrócenie” kierunków strzałek morfizmów. W dalszej części, przy ustalonej kategorii \mathbf{C} , zamiast pary $\text{Hom}_{\mathbf{C}}$, $\text{Hom}_{\mathbf{C}^{\text{op}}}$ będziemy pisać po prostu Hom oraz Hom^{op} , podobnie \circ/\circ^{op} zamiast $\circ_{\mathbf{C}}/\circ_{\mathbf{C}^{\text{op}}}$.

Przykład 2.1.1. Jeżeli kategoria \mathbf{C} utworzona jest ze zbioru częściowo uporządkowanego (P, \leq) (patrz przykład 1.1.3), kategorią \mathbf{C}^{op} przeciwną do \mathbf{C} jest kategoria utworzona ze zbioru częściowo uporządkowanego (P, \geq) .

Przykład 2.1.2. Niech M będzie monoidem². Wówczas możemy utworzyć kategorię \mathbf{M} w następujący sposób:

$$\text{Ob}(\mathbf{M}) = \{M\}, \quad \text{Hom}(M, M) = M, \quad \text{id}_M = e, \quad y \circ x = y \cdot x.$$

Kategorią dualną \mathbf{M}^{op} jest kategoria, dla której zachodzi

$$y \circ^{\text{op}} x = x \cdot y.$$

¹Zapis $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B)$ oznacza klasę morfizmów $A \rightarrow B$ w kategorii \mathbf{C} , natomiast $f \circ_{\mathbf{C}} g$ – złożenie morfizmów f oraz g w kategorii \mathbf{C} .

²Zbiór S wraz z łącznym działaniem $\cdot: S \times S \rightarrow S$ nazywamy *półgrupą*. Jeżeli w S występuje ponadto *element neutralny* $e \in S$, tj. element spełniający $a \cdot e = a = e \cdot a$ dla wszystkich $a \in S$, półgrupę S nazywamy *monoidem*.

Okazuje się, że każde stwierdzenie dotyczące obiektów i morfizmów kategorii \mathbf{C}^{op} może zostać przetłumaczone na logicznie równoważne zdanie dotyczące własności kategorii \mathbf{C} . Rozważmy następujące stwierdzenie:

$P_{\mathbf{C}}(X) \equiv$ dla każdego obiektu $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f: A \rightarrow X$.

Jeżeli zastąpimy w powyższej funkcji zdaniowej obiekty kategorii \mathbf{C} obiektami kategorii dualnej \mathbf{C}^{op} , podobnie dla morfizmów, uzyskamy analogiczne zdanie dla kategorii przeciwnej:

$P_{\mathbf{C}^{\text{op}}}(X) \equiv$ dla każdego obiektu $A^{\text{op}} \in \text{Ob}(\mathbf{C}^{\text{op}})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f^{\text{op}}: A \rightarrow X$,

które można przetłumaczyć na język kategorii \mathbf{C} , „odwracając” kierunek morfizmów w następujący sposób:

$P_{\mathbf{C}}^{\text{op}}(X) \equiv$ dla każdego obiektu $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ istnieje dokładnie jeden morfizm $f: X \rightarrow A$.

Zwróćmy uwagę, że własność $P_{\mathbf{C}}(X)$ jest spełniona wtedy i tylko wtedy, gdy X jest obiektem końcowym kategorii \mathbf{C} . Jak wiemy z kategorii **Set**, obiektami końcowymi są singletony (patrz przykład 1.4.1). Z kolei własność $P_{\mathbf{C}}^{\text{op}}(X)$ definiuje obiekty początkowe, którym we wspomnianej kategorii jest jedynie zbiór pusty. Widać więc, że na ogół własności $P_{\mathbf{C}}(X)$ nie są równoważne $P_{\mathbf{C}}^{\text{op}}(X)$.

Własność $P_{\mathbf{C}}(X)$ nazywamy *samosprzężoną*, jeżeli własność $P_{\mathbf{C}}^{\text{op}}(X)$ jest jej równoważna dla wszystkich X . Dla przykładu własność (w dowolnej kategorii)

$$P(X) \equiv X \text{ jest obiektem zerowym}$$

jest samosprzężona. Pojęciem samosprzężonym jest np. pojęcie izomorfizmu; co należy rozumieć jako: $f: A \rightarrow B$ jest izomorfizmem w kategorii \mathbf{C} wtedy i tylko wtedy, gdy f jest izomorfizmem w \mathbf{C}^{op} . Podobnie samosprzężone są identyczności obiektów.

Podobnie możemy tłumaczyć własności dotyczące morfizmów: dla przykładu, jeżeli $Q_{\mathbf{C}}(f)$ dla $f: A \rightarrow B$ oznacza

$$Q_{\mathbf{C}}(f) \equiv \text{istnieje morfizm } g: B \rightarrow A, \text{ że zachodzi } g \circ f = \text{id}_A,$$

to własność dualna brzmi:

$$Q_{\mathbf{C}}^{\text{op}}(f) \equiv \text{istnieje morfizm } g: A \rightarrow B, \text{ że zachodzi } f \circ g = \text{id}_A,$$

gdzie f jest tym razem typu $f: B \rightarrow A$. Możemy również konstruować bardziej złożone własności, będące funkcją zdaniową wielu obiektów i wielu morfizmów. Jeżeli własność $P_{\mathbf{C}}(A, B, \dots, f, g, \dots)$ zachodzi dla wszystkich obiektów i morfizmów kategorii \mathbf{C} , mówimy, że kategoria \mathbf{C} spełnia własność P , co zapisujemy jako $P(\mathbf{C})$. Możemy wreszcie przedstawić *zasadę dualności*:

Jeżeli własność P zachodzi we wszystkich kategoriach, wówczas własność P^{op} zachodzi we wszystkich kategoriach.

Zasada ta wynika z dwóch obserwacji: $(\mathbf{C}^{\text{op}})^{\text{op}} = \mathbf{C}$ oraz równoważności:

$$P^{\text{op}}(\mathbf{C}) \text{ zachodzi wtedy i tylko wtedy, gdy } P(\mathbf{C}^{\text{op}}).$$

Konsekwencje tej zasady są doniosłe. Ponieważ każde stwierdzenie w języku teorii kategorii ma dwa równoważne stwierdzenia, dowód ogólnej własności obiektów/morfizmów pociąga za sobą dowód własności dualnej.

Ćwiczenie 2.1.1. Wykaż, że:

- $f: A \rightarrow B$ jest monomorfizmem w kategorii \mathbf{C} wtedy i tylko wtedy, gdy $f^{\text{op}}: B \rightarrow A$ jest epimorfizmem w kategorii \mathbf{C}^{op} ,
- dla dowolnych obiektów $X, Y \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ obiekt Z jest produktem X i Y (wraz z morfizmami π_1, π_2) wtedy i tylko wtedy, gdy Z jest koproduktem tych obiektów.

Przykład 2.1.3. Przytoczmy stwierdzenie 1.2.2:

Jeżeli $g \circ f$ jest monomorfizmem, to f jest monomorfizmem.

Dualne stwierdzenie brzmi zatem:

Jeżeli $f \circ g$ jest epimorfizmem, to f jest epimorfizmem.

Dowód pierwszej własności na mocy zasady dualności implikuje również drugi rezultat.

Pojęcia dualne w sensie teorii kategorii w języku angielskim często mają przedrostek „co-”, np. *product/coproduct*, *reflective subcategory/coreflective subcategory* etc. Tym samym *comonomorphism* oznaczałyby *epimorphism*³.

Na ogół kategorie \mathbf{C} znacznie różnią się od swoich kategorii dualnych. Jeżeli jednak zachodzi równość $\mathbf{C} = \mathbf{C}^{\text{op}}$, kategorię nazywamy samosprzężoną.

Stwierdzenie 2.1.1. Każda kategoria dyskretna jest samosprzężona.

Dla dowodu powyższego stwierdzenia wystarczy zauważyć, że jedynymi morfizmami w takich kategoriach, z definicji kategorii dyskretnych, są identyzacje.

Ćwiczenie 2.1.2. Podaj przykład nietrywialnej (nieskończonej, niedyskretniej) kategorii samosprzężonej.

2.2 Funktory

W tej sekcji sformalizowane zostanie pojęcie transformacji między kategoriami. „Morfizmy” między kategoriami zachowującymi ich strukturę nazywać będziemy *funktorami*:

Definicja 2.2.1 (Funktor). Niech dane będą dwie kategorie \mathbf{C} oraz \mathbf{D} . *Funktorem* (kowariantnym) $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ nazywamy funkcję⁴, która każdemu obiektowi $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ przyporządkowuje obiekt $B \in \text{Ob}(\mathbf{D})$ oraz każdemu morfizmowi $f: A \rightarrow B$ kategorii \mathbf{C} morfizm $F(f): F(A) \rightarrow F(B)$ tak, że:

³Czy *nut* oznacza to samo co *coconut*?

⁴W przypadku, gdy ogół obiektów tworzy klasę, możemy rozszerzyć pojęcie funkcji o dziedzinie/przeciwdziedzinie będącej klasą.

1. F zachowuje złożenia, tj. $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ dla odpowiednich $f, g \in \text{Hom}(\mathbf{C})$,
2. F zachowuje identyczności: $F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)}$ dla każdego $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$.

Zwróćmy uwagę, że w definicji funktora również morfizmy muszą zostać przyporządkowane odpowiednim morfizmom – funktory przenoszą nie tylko obiekty między kategoriami, ale także przekształcenia. Definicja, podobnie jak określenie kategorii, jest bardzo szeroka. Zapoznajmy się więc z elementarnymi przykładami funktorów.

Przykład 2.2.1. Dla dowolnej kategorii \mathbf{C} możemy określić:

- *identyczność kategorii* $\text{id}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ spełniająca

$$\text{id}(A) = A, \quad \text{id}(f) = f, \quad A \in \text{Ob}(\mathbf{C}), \quad f \in \text{Hom}(\mathbf{C})$$

jest funktorem,

- *funktor stały* $C: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ spełniający

$$C(A) = D_0, \quad C(f) = \text{id}_{D_0}, \quad A \in \text{Ob}(\mathbf{C}), \quad f \in \text{Hom}(\mathbf{C}),$$

gdzie \mathbf{D} jest dowolną niepustą kategorią,

Dla małych kategorii utworzonych z częściowych porządków/monoidów można scharakteryzować postać funktorów między tymi kategoriami:

Przykład 2.2.2.

- Jeżeli (P, \leq) oraz (Q, \leq) są częściowymi porządkami tworzącymi małe kategorie (przykład 1.1.3), funktorami $F: P \rightarrow Q$ są dokładnie odwzorowania zachowujące porządek⁵.
- Jeżeli M oraz N są monoidami (patrz przykład 2.1.2), funktorami między kategoriami $\mathbf{M} \rightarrow \mathbf{N}$ są dokładnie homomorfizmy monoidów.

Ćwiczenie 2.2.1. Sprawdź powyższe stwierdzenia.

Przykład 2.2.3. W kategorii \mathbf{Set} można zdefiniować następujące funktory:

- *zbioru potęgowego* $\mathcal{P}: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, gdzie każdemu zbiorowi A przyporządkowany jest zbiór potęgowy $\mathcal{P}(A)$, natomiast każdej funkcji $f: A \rightarrow B$ odwzorowanie $\mathcal{P}(f): \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$, które każdemu podzbiorowi $S \subseteq A$ przyporządkowuje obraz $f(S) \subseteq B$.
- *n -tej potęgi* $S^n: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$, określony jako:

$$S^n(f: A \rightarrow B) = f^n: A^n \rightarrow B^n,$$

gdzie $f^n(x_1, \dots, x_n) = (f(x_1), \dots, f(x_n))$.

⁵Odwzorowanie $F: P \rightarrow Q$ zachowuje porządek, jeżeli $a \leq b$ pociąga $F(a) \leq F(b)$ dla wszystkich $a, b \in P$.

Część rozważanych do tej pory obiektów matematycznych określanych jest na zbiorach – są to zbiory wraz z dodatkową strukturą (np. strukturą grupy, pierścienia, przestrzeni liniowej bądź przestrzeni topologicznej etc.). W kategoriach tego rodzaju morfizmami są odpowiednie funkcje. Dla każdej z wymienionych kategorii możemy wyróżnić tzw. *funktor zapominania* $U: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}$, który „zapomina” o przylegającej strukturze. Funktor każdemu obiektowi zwraca odpowiadający zbiór, natomiast morfizmowi – odpowiadającą funkcję. Dla przykładu funktor $U: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Set}$ każdej grupie G przyporządkowuje zbiór G , natomiast homomorfizmowi grup $\varphi: G \rightarrow H$ – funkcję φ . Kategorie o powyższym charakterze nazywamy *konkretnymi*.

Stwierdzenie 2.2.1. Niech $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ będzie funktorem. F zachowuje izomorfizmy, tj. jeżeli $i: A \rightarrow A'$ jest izomorfizmem w \mathbf{C} , $F(i)$ jest izomorfizmem między $F(A)$ oraz $F(A')$.

DOWÓD. Wystarczy skorzystać z faktu, że funktory zachowują złożenia oraz identyfikacji:

$$F(i) \circ F(i^{-1}) = F(i \circ i^{-1}) = F(\text{id}_{A'}) = \text{id}_{F(A')},$$

podobnie $F(i^{-1}) \circ F(i) = \text{id}_{F(A)}$. ■

Stwierdzenie przeciwne nie zachodzi w ogólności:

Ćwiczenie 2.2.2. Podaj przykład funktora, dla którego $F(i)$ jest izomorfizmem, natomiast i nie.

Stwierdzenie 2.2.2. Złożenie $G \circ F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{E}$ funktorów $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ oraz $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{E}$ określone jako

$$(G \circ F)(f: A \rightarrow B) = G(F(f)): G(F(A)) \rightarrow G(F(B))$$

jest funktorem.

Każdy funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ indukuje funktor przeciwny $F^{\text{op}}: \mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}^{\text{op}}$, który zachowuje się tak samo na obiektach, jak i morfizmach jak F .

Jeżeli jesteśmy już przy kategoriach przeciwnych, możemy podać przykłady pewnych funktorów, które – zamiast zachowywać kierunek strzałek – odwracają je. Takie funktory nazywamy *kontrawariantnymi*.

Definicja 2.2.2 (Funktor kontrawariantny). Niech dane będą kategorie \mathbf{C} oraz \mathbf{D} . Funktor $\mathbf{C}^{\text{op}} \rightarrow \mathbf{D}$ nazywamy funktorem *kontrawariantnym*.

Mówiąc, że $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest funktorem kontrawariantnym, mamy na myśli, że zachodzą następujące warunki:

$$i) \quad F(\text{id}_A) = \text{id}_{F(A)},$$

$$ii) \quad F(f \circ g) = F(g) \circ F(f),$$

$$iii) \quad F(f: A \rightarrow B) = F(f): F(B) \rightarrow F(A).$$

Dzięki temu zabiegowi nie musimy określać funktora bezpośrednio na kategorii przeciwnej.

Ćwiczenie 2.2.3. Sprawdź, że definicja funktora kontrawariantnego postaci $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}^{\text{op}}$ jest równoważna poprzedniej definicji.

Zgodnie z definicją, funktor przeciwny może być traktowany jako funktor „kontra-kontrawariantny”.

Przykład 2.2.4. Funktor ${}^{\text{op}}: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}^{\text{op}}$ odsyłający kategorię \mathbf{C} w kategorię przeciwną \mathbf{C}^{op} (tj. każdemu morfizmowi $f: A \rightarrow B$ dualny morfizm $f^{\text{op}}: B \rightarrow A$) jest kontrawariantny.

Przykład 2.2.5. Funktor (kontrawariantny) $Q: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Set}$ przyporządkowujący każdemu zbiorowi jego zbiór potęgowy, natomiast każdej funkcji $f: A \rightarrow B$ – funkcję $Q(f): Q(B) \rightarrow Q(A)$ przyporządkowującą każdemu $S \subseteq B$ przeciwobraz $f^{-1}(S)$, nazywamy *kontrawariantnym funktorem zbioru potęgowego*.

Ćwiczenie 2.2.4. Wykaż, że kategoria \mathbf{Rel} zbiorów z relacjami jako morfizmami jest samosprzężona, tj. $\mathbf{Rel}^{\text{op}} \cong \mathbf{Rel}$.

Przykład 2.2.6. Rozważmy kategorię $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ przestrzeni liniowych nad ciałem liczb rzeczywistych. Wyróżnić możemy kontrawariantny funktor $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}} \rightarrow \mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$ przyporządkowujący każdej przestrzeni V jej przestrzeń sprzężoną⁶ V^* oraz każdemu odwzorowaniu liniowemu $T: V \rightarrow W$ przekształcenie sprzężone $T^*: W^* \rightarrow V^*$ określone następująco:

$$T^*(\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}) = (\varphi \circ T): V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Przykład 2.2.7. Dla każdej przestrzeni topologicznej X możemy określić pierścień $C(X)$ ciągłych funkcji $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ z działaniami

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x), \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x).$$

Każdej funkcji $f: X \rightarrow Y$ możemy przyporządkować $C(f): C(Y) \rightarrow C(X)$, gdzie dla każdego $q: Y \rightarrow \mathbb{R}$ określamy

$$C(f)(q): X \rightarrow \mathbb{R}, \quad C(f)(q) = q \circ f.$$

Tak powstały funktor $C: \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{CRng}$ (gdzie \mathbf{CRng} stanowi kategorię pierścieni przemiennych) jest kontrawariantny.

2.3 Typy funktorów

Tak jak w przypadku morfizmów, można mówić o pewnych szczególnych własnościach funktorów. Rozpocznijmy od funktorów w całości zachowujących strukturę kategorii.

Definicja 2.3.1 (Izomorfizm kategorii). Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ nazywamy *izomorfizmem kategorii*, jeżeli istnieje funktor $G: \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{C}$ spełniający

$$G \circ F = \text{id}_{\mathbf{C}}, \quad F \circ G = \text{id}_{\mathbf{D}}.$$

⁶Przypomnijmy, że dla każdej przestrzeni liniowej V możemy utworzyć tzw. *przestrzeń sprzężoną* V^* :

$$V^* = \{\varphi: \varphi \text{ jest przekształceniem liniowym } V \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Jak można się spodziewać, funktor G występujący w powyższej definicji jest określony jednoznacznie, stąd możemy przyjąć oznaczenie $G = F^{-1}$. Kategorie \mathbf{C} oraz \mathbf{D} , dla których istnieje izomorfizm, nazywamy izomorficznymi i stosujemy zapis $\mathbf{C} \cong \mathbf{D}$.

Stwierdzenie 2.3.1. Niech \mathbf{Mat}_K stanowi kategorię złożoną z liczb naturalnych, gdzie $\text{Hom}(m, n)$ jest zbiorem wszystkich macierzy $m \times n$ nad ciałem K , $\text{id}_n: n \rightarrow n$ jest macierzą jednostkową wymiaru $n \times n$, gdzie złożenie $A \circ B$ definiowane jest jako iloczyn macierzy BA . Kategoria ta jest izomorficzna z kategorią \mathbf{FinVec}_K skończenie wymiarowych przestrzeni liniowych nad ciałem K .

DOWÓD. Utworzymy funktor $F: \mathbf{Mat}_K \rightarrow \mathbf{FinVec}_K$ w następujący sposób: $F(n) = K^n$, gdzie K^n oznacza n -wymiarową przestrzeń liniową nad ciałem K ; takie odwzorowanie jest wzajemnie jednoznaczne. Dla każdej takiej przestrzeni ustalmy bazę. Wówczas z każdą macierzą A wymiaru $n \times m$ możemy związać dokładnie jedno przekształcenie liniowe względem ustalonej bazy $F(A) = \varphi_A$. Z algebry liniowej wiemy, że złożenia przekształceń liniowych odpowiadają iloczynowi macierzy reprezentujących te odwzorowania. ■

Stwierdzenie 2.3.2. Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest izomorfizmem kategorii wtedy i tylko wtedy, gdy jest wzajemnie jednoznaczna zarówno na obiektach i morfizmach⁷.

Pojęcie izomorfizmu kategorii jest bardzo restrykcyjne. Rozważmy następujący poręczający przykład.

Przykład 2.3.1. Rozważmy kategorię \mathbf{C} złożoną z jednego obiektu O oraz identyczności id_O . Kategoria \mathbf{D} złożona z dwóch obiektów A, B , identyczności id_A oraz dwóch izomorfizmów $f: A \rightarrow B$ oraz $g: B \rightarrow A$ **nie jest** izomorficzna z \mathbf{C} na mocy poprzedniego stwierdzenia (ponieważ zbiory $\text{Hom}(\mathbf{C})$ oraz $\text{Hom}(\mathbf{D})$ są nierównoliczne).

W stwierdzeniu 2.3.1 poszczególne kategorie składały się z obiektów, które nie posiadały różnych od siebie izomorficznych kopii. I chociaż każdą kategorię da się zastąpić kategorią, w której obiekty izomorficzne są utożsamiane⁸, na ogół nie będziemy zakładać, że dla każdego obiektu A , jeżeli $A \cong A'$, to $A = A'$.

W dalszej części zajmować się będziemy jedynie kategoriami *lokalnie małymi*:

Definicja 2.3.2 (Kategoria mała, lokalnie mała). Kategorię \mathbf{C} nazywamy:

- *małą*, jeżeli ogół obiektów oraz morfizmów tworzy zbiór,
- *lokalnie małą*, jeżeli dla każdej pary obiektów $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ ogół morfizmów $\text{Hom}(A, B)$ tworzy zbiór.

Każda kategoria mała jest lokalnie mała. Zwróćmy uwagę, że kategorie konkretne, chociaż nie muszą być małe, zawsze są lokalnie małe – ogół wszystkich funkcji $A \rightarrow B$ jest (ograniczonym) zbiorem mocy nieprzekraczającej $|B|^{|A|}$.

⁷Innymi słowy każdemu obiektowi \mathbf{C} odpowiada poprzez funktor F dokładnie jeden obiekt kategorii \mathbf{D} oraz każdemu morfizmowi $f \in \text{Hom}(\mathbf{C})$ – dokładnie jeden morfizm klasy $\text{Hom}(\mathbf{D})$.

⁸Niech \mathbf{C} będzie dowolną kategorią. Rozważmy kategorię \mathbf{C}' , która składa się z klas abstrakcji obiektów kategorii \mathbf{C} względem relacji izomorficzności \cong . Czy odwzorowanie $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}'$ stanowi funktor?

Każdy funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ między kategoriami lokalnie małymi wyznacza funkcję

$$F_{A,B}: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(B)), \quad F_{A,B}(f) = F(f). \quad (2.1)$$

Jesteśmy gotowi przedstawić szczególne typy funktorów:

Definicja 2.3.3 (Funktor pełny, wierny, pełnie wierny). Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ nazywamy:

- *wiernym*, jeżeli odwzorowanie $F_{A,B}$ (patrz: (2.1)) jest injekcją,
- *pełnym*, jeżeli $F_{A,B}$ jest surjekcją,
- *pełnie wiernym*, jeżeli dla bijekcją.

dla wszystkich obiektów $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$.

Zacznijmy od trywialnej obserwacji:

Stwierdzenie 2.3.3. Każdy izomorfizm kategorii jest pełnie wierny.

Stwierdzenie to wynika wprost z przytoczonych definicji oraz stwierdzenia 2.3.2. Stąd też mamy:

Przykład 2.3.2. Dla każdej (niepustej) kategorii \mathbf{C} identyczność kategorii jest pełnie wierna (jako izomorfizm kategorii).

Funktor wierny nie musi być różnowartościowy na obiektach kategorii, podobnie pełny funktor nie musi być surjekcją w klasie obiektów (można zauważyć, że takie żądane jest bardzo restrykcyjne). Z kolei:

Przykład 2.3.3. Funktor zapominania $U: \mathbf{Vec} \rightarrow \mathbf{Set}$ jest wierny, ponieważ każda para różnych przekształceń liniowych przechodzi na odpowiadające różne funkcje. Funktor U nie jest jednak pełny, bo istnieją funkcje, które nie są przekształceniami liniowymi. Ogólniej, każdy funktor zapominania jest wierny oraz, wyłączając trywialne kontrprzykłady, na ogół nigdy pełny.

Przykład 2.3.4. Funktor przestrzeni dyskretnej $D: \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Top}$ przyporządkowujący każdemu zbiorowi przestrzeń dyskretną określoną na tym zbiorze jest pełny, gdyż wszystkie dla dowolnych zbiorów A, B , rodzina funkcji $f: A \rightarrow B$ ciągłych między przestrzeniami dyskretnymi pokrywa się z rodziną B^A wszystkich funkcji.

Zachodzi pewien związek między wyróżnionymi typami funktorów a różnowartościowością/surjektywnością na morfizmach.

Stwierdzenie 2.3.4. Jeżeli funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest surjekcją na morfizmach (tzn. gdy dla każdego morfizmu $g: F(A) \rightarrow F(B)$ kategorii \mathbf{D} istnieje morfizm $f: A \rightarrow B$ kategorii \mathbf{C} , dla którego $g = F(f)$), to jest pełny.

DOWÓD. Załóżmy, że dla funktora $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ dla każdego morfizmu $g: F(A) \rightarrow F(B) \in \text{Hom}_{\mathbf{D}}$ kategorii \mathbf{D} istnieje morfizm $f: A \rightarrow B$ o własności $g = F(f)$, $F_{A,B}$ jest surjekcją, jako że $F_{A,B}(f) = F(f) = g$. ■

Podobnie możemy łatwo wykazać, że:

Stwierdzenie 2.3.5. Jeżeli funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest różnowartościowy na morfizmach (tj. gdy dla każdej pary morfizmów $f_1, f_2: A \rightarrow B$ kategorii \mathbf{C} równość $F(f_1) = F(f_2)$ pociąga $f_1 = f_2$), to jest wierny.

Implikacja w drugą stronę nie zachodzi: rozważmy dwie kategorie dyskretne: kategorię \mathbf{C} złożoną z dwóch obiektów oraz kategorię $\mathbf{1}$ złożoną z jednego obiektu 1 . Funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{1}$ odsyłający oba obiekty $A, B \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ nie jest różnowartościowy, ponieważ

$$F(\text{id}_A) = \text{id}_1 = F(\text{id}_B),$$

natomiast jest wierny, jako że $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, B) = \emptyset$, dla pojedynczych obiektów jedyny morfizm – identyczność – przechodzi (w sposób różnowartościowy) na odpowiadającą identyczność.

Ćwiczenie 2.3.1. Pokaż, że funktor jest różnowartościowy na morfizmach wtedy i tylko wtedy, gdy jest wierny oraz różnowartościowy na obiektach.

Nietrudno sprawdzić, że złożenia zachowują własności wspomnianych funktorów, czemu poświęcone jest poniższe ćwiczenie.

Ćwiczenie 2.3.2. Sprawdź, że złożenie funktorów wiernych jest wierne, natomiast złożenie funktorów pełnych – pełne.

Ćwiczenie 2.3.3. Wykaż, że pełnie wierny funktor $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ jest różnowartościowy na obiektach z dokładnością do izomorfizmu, tj. jeżeli $F(A) \cong F(B)$, to $A \cong B$.

Zapoznamy się z dwoma, w pewnym sensie przeciwstawnymi, funktorami w kategorii grup.

Przykład 2.3.5. Funktor $\Psi: \mathbf{Ab} \rightarrow \mathbf{Grp}$ zanurzenia jest pełnie wierny, ponieważ \mathbf{Ab} zawiera wszystkie homomorfizmy między grupami abelowymi.

Przykład 2.3.6. Niech dana będzie grupa G . Każdej takiej grupie można przyporządkować grupę abelową⁹ $G/[G, G]$, gdzie dla każdego homomorfizmu grup $\varphi: G \rightarrow F$ w grupę abelową F istnieje dokładnie jeden homomorfizm $\psi: G/[G, G] \rightarrow F$, dla którego poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi} & G/[G, G] \\ & \searrow \varphi & \downarrow \psi \\ & & F \end{array}$$

jest przemienny¹⁰. Możemy określić funktor $\Phi: \mathbf{Grp} \rightarrow \mathbf{Ab}$ (zwany czasem funktorem *abelianizacji*), gdzie \mathbf{Ab} stanowi kategorię grup abelowych wraz z homomorfizmami grup między nimi, który każdemu obiektowi G przyporządkowuje $G/[G, G]$,

⁹Niech G będzie dowolną grupą. *Komutatorem* elementów $x, y \in G$ nazywamy wyrażenie $xyx^{-1}y^{-1}$. *Komutantem* grupy G nazywamy grupę generowaną przez wszystkie komutatory elementów grupy G i oznaczamy symbolem $[G, G]$. Formalnie:

$$[G, G] = \langle \{xyx^{-1}y^{-1} : x, y \in G\} \rangle.$$

¹⁰Stwierdzenie to pozostawiamy bez dowodu.

natomiast homomorfizmowi $\varphi: G \rightarrow F$ (niekoniecznie w grupę abelową) homomorfizm $\Phi(\varphi): G/[G, G] \rightarrow F/[F, F]$, który określony jest jednoznacznie poprzez poniższy przemienny diagram:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\pi_G} & G/[G, G] \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \Phi(\varphi) \\ F & \xrightarrow{\pi_F} & F/[F, F] \end{array}$$

Przekształcenia π_G oraz π_F stanowią naturalne przekształcenia ilorazowe.

Nietrudno sprawdzić, że Φ jest surjekcją na obiektach kategorii **Ab**: dla każdej grupy przemienna G zachodzi $G \cong G/[G, G]$. Tym samym Φ zachowuje się jak identyczność dla argumentów będących grupami abelowymi. Jednak nie jest to ani funktor pełny, ani wierny: rozważmy dwie podgrupy multiplikatywne kwaternionów:

$$G = \{1, -1, i, -i, j, -j, k, -k\}, \quad H = \{1, -1\},$$

gdzie $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$ oraz m.in.

$$ij = k, \quad ji = -k, \quad jk = i, \quad kj = -i.$$

Można sprawdzić, że abelianizacja grupy G jest izomorficzna z $H \times H$. Wówczas, ponieważ jedynymi odwzorowaniami $H \rightarrow G$ są homomorfizmy określone jednoznacznie poprzez równość $\varphi_1(-1) = 1$ oraz $\varphi_2(-1) = -1$, natomiast istnieją aż cztery homomorfizmy między $H \rightarrow H \times H$, funkcja $F_{H,G}$ nie jest surjekcją na

$$\text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(\Phi(H), \Phi(G)) = \text{Hom}_{\mathbf{Ab}}(H, H \times H).$$

Zatem Φ nie jest funktorem pełnym. Sprawdzenie, że funktor Φ nie jest wierny, pozostawiamy Czytelnikowi jako ćwiczenie.

Powyższy przykład powróci w dalszej części w innej formie pod nazwą *refleksji*. Jest on istotny zarówno dla teorii grup, jak i teorii kategorii.

Ćwiczenie 2.3.4. Sprawdź, jakiego typu jest funktor z przykładu 2.2.6.

2.4 Przekształcenia naturalne

Poniższy fragment poświęcony jest przekształceniom naturalnym, przy czym sens określenia „naturalny” zostanie ujawniony niedługo. Rozważmy pewien znany z algebry liniowej przykład.

Przykład 2.4.1. Niech V będzie skończenie wymiarową przestrzenią nad \mathbb{R} , określmy

$$V^* = \{\varphi: \varphi \text{ jest przekształceniem liniowym } V \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Przestrzeń V^* nazywamy *przestrzenią sprzężoną* do V . Znany jest fakt, że V jest przestrzenią izomorficzną z V^* . Analogicznie możemy utworzyć *drugą przestrzeń sprzężoną*

$$V^{**} = (V^*)^* = \{\varphi: \varphi \text{ jest przekształceniem liniowym } V^* \rightarrow \mathbb{R}\}.$$

Skoro V jest izomorficzne z V^* , to na tej samej zasadzie zachodzi $V^* \cong V^{**}$ i wreszcie $V \cong V^{**}$.

Jednakże możemy skonstruować bezpośrednio izomorfizm $\Phi: V \rightarrow V^{**}$. Zanim jednak go utworzymy, zwróćmy uwagę, że wartością przyjmowaną dla każdego wektora $v \in V$ jest funkcjonal $\varphi: V^* \rightarrow \mathbb{R}$. Zatem, by określić Φ , wystarczy określić wartość $\Phi(v)$ dla każdego $\varphi \in V^{**}$. Możemy w prosty sposób przyjąć zadeklarować

$$\Phi(v)(\varphi) = \varphi(v). \quad (2.2)$$

Możemy uprościć notację, wprowadzając dla każdego $v \in V$ operację $\bar{v}: V^* \rightarrow \mathbb{R}$ zadaną wzorem

$$\bar{v}(\varphi) = \varphi(v),$$

przy takim oznaczeniu $\Phi(v) = \bar{v}$. Przypomnijmy, że zgodnie z przykładem 2.2.6 dla każdego odwzorowania liniowego $f: V \rightarrow W$ możemy wprowadzić przekształcenie sprzężone (kontrawariantne) $f^*: W^* \rightarrow V^*$ jako

$$f^*(\varphi) = \varphi \circ f$$

dla każdego $\varphi: W \rightarrow \mathbb{R}$ i podobnie $f^{**}: V^{**} \rightarrow W^{**}$ wskazać jako

$$f^{**}(\alpha) = \alpha \circ f^*,$$

gdzie $\alpha \in V^{**}$. Dzięki temu każdemu przekształceniu liniowemu $f: V \rightarrow W$ przypisaliśmy odpowiadający morfizm $f^{**}: V^{**} \rightarrow W^{**}$ zdefiniowany zależnością

$$f^{**}(\alpha)(\varphi) = \alpha \circ \varphi \circ f, \quad \alpha \in V^{**}, \varphi \in V^*.$$

Odwzorowanie (2.2) jest *kanoniczne* w tym sensie, że nie wymaga od V^{**} żadnej dodatkowej struktury. Przyporządkowaliśmy zatem każdej skończonej wymiarowej przestrzeni liniowej $V \in \text{Ob}(\mathbf{FinVec}_{\mathbb{R}})$ przekształcenie $\Phi_V: V \rightarrow V^{**}$. Dla każdego $f: V \rightarrow W \in \text{Hom}(\mathbf{FinVec}_{\mathbb{R}})$ diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{\Phi_V} & V^{**} \\ f \downarrow & & \downarrow f^{**} \\ W & \xrightarrow{\Phi_W} & W^{**} \end{array}$$

jest przemienny. Konstrukcję możemy przenieść dla całej kategorii $\mathbf{Vec}_{\mathbb{R}}$.

Nie istnieje jednak podobna „naturalna” konstrukcja dla przestrzeni sprzężonej $\varphi: V \rightarrow V^*$.

Ćwiczenie 2.4.1. Niech X będzie przestrzenią całkowicie regularną¹¹. Rozważmy zbiór $C(X, [0, 1])$ wszystkich funkcji ciągłych $X \rightarrow [0, 1]$ oraz zbiór $[0, 1]^C$ wraz z topologią produktową. Skonstruuj naturalne przekształcenie $e: X \rightarrow [0, 1]^C$.

Spróbujmy wyabstrahować pojęcie naturalnego przekształcenia:

Definicja 2.4.1 (Przekształcenie naturalne). Niech $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ będą funktorami. *Przekształceniem naturalnym* $\tau: F \rightarrow G$ nazywamy funkcję, która każdemu obiektowi $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$ przyporządkowuje morfizm $\tau_A: F(A) \rightarrow G(A)$ w taki sposób, że dla każdego morfizmu $f: A \rightarrow B \in \text{Hom}(\mathbf{C})$ poniższy diagram

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\tau_A} & G(A) \\ F(f) \downarrow & & \downarrow G(f) \\ F(B) & \xrightarrow{\tau_B} & G(B) \end{array}$$

jest przemienny.

W przykładzie 2.4.1 diagram możemy otrzymać, stosując powyższą definicję dla funktorów $F = \text{id}_{\mathbf{vec}_{\mathbb{R}}}$ oraz $G = (**)$ będącym funktorem przyporządkowującym obiekty i morfizmy drugiej przestrzeni sprzężonej. Przekształcenie $\Phi (V \mapsto \Phi_V)$ jest zatem przekształceniem naturalnym w sensie teorii kategorii. Analogiczne przyporządkowanie za pomocą funktora $*$ przestrzeni sprzężonej nie jest jednak transformacją naturalną, jako że jest kontrawariantny w przeciwieństwie do funktora identyczności.

Z drugiej strony istnieje ważny przykład w kategorii skończenie wymiarowych przestrzeni z iloczynem skalarnym **FinInner** z przekształceniami unitarnymi¹².

Przykład 2.4.2. Zgodnie z twierdzeniem Riesz o reprezentacji odwzorowanie $R_V: V \rightarrow V^*$ zadane jako

$$R_V(v)(x) = \langle v, x \rangle$$

jest izomorfizmem, co znaczy, że każdy element V^* jest postaci $R_V(v) = \langle v, \cdot \rangle$ dla jednoznacznie wyznaczonego $v \in V$. Diagram

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{R_V} & V^* \\ f \downarrow & & \downarrow (f^{-1})^* \\ W & \xrightarrow{R_W} & W^* \end{array}$$

jest przemienny. Przekształcenie R działające $V \mapsto R_V$ jest transformacją naturalną. Warto zwrócić uwagę, że konstrukcja ta, podobnie jak poprzednia, jest niezależna od doboru bazy w podanych przestrzeniach liniowych.

¹¹Przestrzeń topologiczna X jest *całkowicie regularna*, jeżeli dla każdego punktu $x \in X$ oraz zbioru domkniętego $F \subseteq X$ niezawierającego x istnieje taka funkcja ciągła $f: X \rightarrow [0, 1]$, że $f(x) = 0$ oraz $f(F) = \{1\}$.

¹²Przekształcenie $\sigma: V \rightarrow W$ jest *unitarne*, gdy jest bijekcją oraz

$$\langle \sigma(v), w \rangle = \langle v, \sigma^{-1}(w) \rangle, \quad v \in W, w \in W$$

gdzie $\langle \cdot, \cdot \rangle$ są iloczynami skalarnymi odpowiednio W oraz V .

Ćwiczenie 2.4.2. Wykaż równość

$$R_W \circ f = (f^{-1})^* \circ R_V$$

z diagramu z przykładu 2.4.2.

Zanim przejdziemy dalej, potraktujmy

$$\{\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) : X \in \text{Ob}(\mathbf{C})\}$$

jako obiekty pewnej kategorii. Dla każdego morfizmu $f: X \rightarrow Y$ możemy wprowadzić morfizm f^{\leftarrow} między zbiorami $\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y)$ zadany jako

$$f^{\leftarrow}(\alpha) = f \circ \alpha$$

dla każdego $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X)$.

Niech $F: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ będzie funktorem; ustalmy także $A \in \text{Ob}(\mathbf{C})$. Jeżeli $f: X \rightarrow Y$ oraz $\alpha: A \rightarrow X$ są morfizmami w \mathbf{C} , wówczas zachodzi

$$F(f \circ \alpha) = F(f) \circ F(\alpha),$$

co możemy zapisać również jako

$$F(f^{\leftarrow}(\alpha)) = ((F(f))^{\leftarrow} \circ F)(\alpha), \quad (2.3)$$

czyli

$$F \circ f^{\leftarrow} = (F(f))^{\leftarrow} \circ F.$$

Zachodzi więc poniższa przemienność diagramu:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) & \xrightarrow{F_X} & \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(X)) \\ \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -) = f^{\leftarrow} \downarrow & & \downarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), -) = (F(f))^{\leftarrow} \\ \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, Y) & \xrightarrow{F_Y} & \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(Y)) \end{array}$$

gdzie $F_X: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, X) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(X))$ spełnia (2.3). Sprawdźmy, że F , traktowany jako funktor

$$F: \text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -) \rightarrow \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(-)),$$

jest przekształceniem naturalnym. Istotnie, obiektowi X kategorii \mathbf{C} przy doborze funktorów

$$\text{Hom}_{\mathbf{C}}(A, -): \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{Set}, \quad \text{Hom}_{\mathbf{D}}(F(A), F(-)): \mathbf{D} \rightarrow \mathbf{Set}$$

przyporządkowana jest funkcja $X \mapsto F_X$.

Powyższy schemat ukazuje bardziej abstrakcyjną strukturę kategorii w ramach przekształceń naturalnych. Powrócimy jednak do przykładów bardziej „konkretnych”.

Ćwiczenie 2.4.3. Sprawdź, że abelianizacja z przykładu 2.3.6 tworzy przekształcenie naturalne.

Powróćmy do przykładu 2.4.1. Przekształcenie naturalne $\tau: \text{id}_{\mathbf{FinVec}_{\mathbb{R}}} \rightarrow (**)$ spełnia następującą własność: Φ_V jest izomorfizmem dla każdego V . Możemy rozszerzyć tę własność na funktory $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$:

Definicja 2.4.2 (Izomorfizm naturalny). Mówimy, że funktory $F, G: \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ są naturalnie izomorficzne, jeżeli istnieje naturalny izomorfizm $\tau: F \rightarrow G$. Piszemy wówczas $F \cong G$.